УДК 533.6, 532.5, 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 20.04.2014, после переработки 10.05.2014.

Для линеаризованных квазигидродинамических уравнений доказана теорема о единственности классического решения поставленной начально-краевой задачи. Асимптотическая устойчивость равновесного решения установлена.

Ключевые слова: линеаризованные квазигидродинамические уравнения, единственность классического решения, асимптотическая устойчивость равновесного решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 33–45.

Введение

Квазигидродинамическая (КГД) система для сжимаемой вязкой теплопроводной среды была выведена автором в [1]. КГД система стала предметом многочисленных исследований [2]. Для нее справедлива теорема о возрастании полной энтропии в адиабатически изолированном объеме. Указанная система обладает точными физически адекватными решениями. Линеаризованная квазигидродинамическая система для одномерных нестационарных течений была выведена в [3]. Там же доказана теорема о единственности классического решения поставленной начально-краевой задачи.

Глубокий математический анализ полной КГД системы и ее баротропного приближения проведен А.А. Злотником [4]. Найдены ограничения на уравнения состояния и выражения для диссипативных коэффициентов, при которых эта система является равномерно параболической по Петровскому. Это позволило сформулировать локальную по времени теорему о существовании и единственности решения задачи Коши. Выведена линеаризованная КГД система в общем случае. Методом Фурье построено обобщенное решение задачи Коши для нее. Кроме того, поставлена начально-краевая задача. Доказана глобальная по времени теорема о существовании и единственности обобщенного решения из подходящего энергетического класса. Выведены оценки норм решения. Установлен факт устойчивости малых возмущений для нелинейной КГД системы на бесконечном промежутке времени.

В настоящей работе эти исследования продолжены. Для линеаризованной квазигидродинамической системы в трехмерном нестационарном случае поставлена начально-краевая задача и дано определение ее классического решения. Доказана теорема о единственности классического решения в предположении, что таковое существует. Методом энергетических неравенств установлен факт асимптотической устойчивости равновесного решения линеаризованной КГД системы.

1. Линеаризованные квазигидродинамические уравнения. Постановка начально-краевой задачи

Выпишем квазигидродинамическую систему для сжимаемой вязкой теплопроводной среды в дивергентной форме без учета внешних сил:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho \vec{u}) = \mathrm{div}\ (\rho \vec{w}), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \mathrm{div}\ \Pi +$$
$$+\mathrm{div}\ [(\rho \vec{w} \otimes \vec{u}) + (\rho \vec{u} \otimes \vec{w})], \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big)\Big] + \mathrm{div}\ \Big[\rho\vec{u}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big) + p\vec{u}\Big] + \mathrm{div}\ \vec{q} =$$
$$= \mathrm{div}\ (\Pi \cdot \vec{u}) + \mathrm{div}\ \Big[\rho\vec{w}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big) + p\vec{w} + \rho\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\Big]. \tag{1.3}$$

Здесь

$$\Pi = \eta\Big((\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T - \frac{2}{3} I\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big),$$
$$\vec{q} = -æ \nabla T,$$
$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big),$$

где I – единичный тензор-инвариант второго ранга. Для определенности будем считать, что сплошная среда представляет собой идеальный политропный газ. В этом случае к системе необходимо добавить уравнения состояния

$$p = \rho \mathcal{R} T, \qquad \varepsilon = c_v T.$$

Здесь $\mathcal{R}$ – газовая постоянная, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Удельная внутренняя энергия ε является линейной функцией температуры T. Зависимость $\eta = \eta(T)$ коэффициента динамической вязкости от температуры выберем в виде

$$\eta = \eta_1 \Big(\frac{T}{T_1}\Big)^{\omega},$$

где η_1 – известное значение коэффициента η при температуре T_1, ω – заданное число из промежутка $[0.5,\ 1]$. Коэффициент теплопроводности æ и характерное время релаксации τ связаны с η соотношениями

$$æ = \frac{c_p \eta}{Pr}, \quad \tau = \frac{\eta}{p\ Sc},$$

где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, Pr и Sc – числа Прандтля и Шмидта соответственно. Квазигидродинамическая система (1.1) – (1.3) замкнута относительно неизвестных функций – плотности $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Пренебрегая в (1.1) – (1.3) членами, содержащими τ, получим классические уравнения Навье–Стокса для сжимаемой вязкой теплопроводной среды.

Для удельных теплоемкостей выполняется соотношение Майера

$$c_p - c_v = \mathcal{R}.$$

Определим показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1.$$

Отсюда находим

$$c_v = \frac{\mathcal{R}}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma \mathcal{R}}{\gamma - 1}.$$

Выпишем также известную формулу

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)},$$

связывающую удельную внутреннюю энергию с плотностью и давлением.

Для одноатомного газа твердых шаров при нормальных условиях $\omega = 0.5$, $\gamma = 5/3$, $Pr = 2/3$, $Sc = 0.77$. Если таким газом является гелий, то $\mathcal{R} = 2.0785 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Для воздуха при аналогичных условиях $\omega = 0.75$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.71$, $Sc = 0.74$, $\mathcal{R} = 2.87 \cdot 10^2$ Дж/(кг · К).

Пусть

$$\rho = \rho_0, \quad \vec{u} = 0, \quad T = T_0$$

– равновесное решение (1.1) – (1.3). Символами ρ_0 и T_0 обозначены некоторые положительные константы. Будем искать решение КГД системы в виде

$$\rho = \rho_0\big(1 + \widetilde{\rho}\big), \quad \vec{u} = \widetilde{\vec{u}}, \quad T = T_0\big(1 + \widetilde{T}\big). \tag{1.4}$$

Подставим (1.4) в (1.1) – (1.3). Пренебрежем произведениями малых величин и их производных. Затем опустим знаки "тильда" . Получим линеаризованную полную квазигидродинамическую систему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} = \frac{p_0 \tau_0}{\rho_0} \operatorname{div} \nabla(\rho + T), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_0} \nabla(\rho + T) = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \Pi, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial t}(\rho + T) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{1}{p_0} \operatorname{div} \vec{q} =$$
$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0 \tau_0}{\rho_0} \operatorname{div} \nabla(\rho + T). \tag{1.7}$$

Здесь

$$\Pi = \eta_0 \Big((\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T - \frac{2}{3} I \operatorname{div} \vec{u} \Big), \quad \vec{q} = -æ_0 T_0 \nabla T. \tag{1.8}$$

Кроме того, выполнены соотношения

$$\eta_0 = p_0\tau_0 Sc, \quad æ_0 = \frac{\gamma\mathcal{R}\eta_0}{(\gamma-1)Pr}, \quad p_0 = \rho_0\mathcal{R}T_0. \tag{1.9}$$

Система (1.5) – (1.7) может быть преобразована к эквивалентному виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{u} = \frac{p_0\tau_0}{\rho_0}\ \mathrm{div}\ \nabla(\rho+T), \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_0}\ \nabla(\rho+T) = \frac{1}{\rho_0}\mathrm{div}\ \Pi, \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial T}{\partial t} + \ \mathrm{div}\ \vec{u} + \frac{1}{p_0}\ \mathrm{div}\ \vec{q} = \frac{p_0\tau_0}{\rho_0}\ \mathrm{div}\ \nabla(\rho+T). \tag{1.12}$$

Пусть V – ограниченная односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей ∂V, $\overline{V} = V\cup\partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $\vec{x}\in\partial V$, $Q = V\times[0,\ T_f]$ – ограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}\times\mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V}\times[0,\ T_f]$ – его замыкание, T_f – фиксированное положительное число или символ $+\infty$. Параметр $t\in[0,\ T_f]$ интерпретируется как время. Добавим к системе (1.10) – (1.12) начальные условия

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_*(\vec{x}), \quad \rho\Big|_{t=0} = \rho_*(\vec{x}), \quad T\Big|_{t=0} = T_*(\vec{x}), \quad \vec{x}\in\overline{V}, \tag{1.13}$$

а также граничные условия

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial V} = 0, \quad t\in[0,\ T_f]. \tag{1.14}$$

Здесь $\vec{u}_*(\vec{x})\in\mathbf{C}^2(V)\cap\mathbf{C}^1(\overline{V})$, $\rho_*(\vec{x})\in C^2(V)\cap C^1(\overline{V})$ и $T_*(\vec{x})\in C^2(V)\cap C^1(\overline{V})$ – заданные функции. Поле $\vec{u}_*(\vec{x})$ обращается в нуль на ∂V. Будем считать, что

$$\int\limits_V \rho_*\ dV = 0, \quad \int\limits_V T_*\ dV = 0. \tag{1.15}$$

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x},t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел α_1, α_2, α_3 и β, подчиняющихся неравенству $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\beta\leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x},t) = (f_1(\vec{x},t), f_2(\vec{x},t), f_3(\vec{x},t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Определение. *Классическим решением начально–краевой задачи* (1.10) – (1.12), (1.13) – (1.14) *назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)\in\boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q)\cap\boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$, $\rho = \rho(\vec{x},t)\in$

$C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ *и* $T = T(\vec{x},t) \in C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},t) \in Q$ *уравнениям* (1.10) – (1.12), *а также условиям* (1.13) – (1.14).

2. Основное энергетическое равенство. Единственность классического решения

Изучим свойства классического решения, предполагая, что при некоторых начальных данных оно существует.

Теорема 1. *На любом классическом решении начально-краевой задачи* (1.10) – (1.12), (1.13) – (1.14) *при всех* $(\vec{x},t) \in Q$ *выполняется энергетическое равенство*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{p_0}{\rho_0}\rho^2 + \vec{u}^2 + \frac{p_0}{\rho_0(\gamma-1)}T^2\Big) + \frac{p_0}{\rho_0}\ div\ \big(\vec{u}(\rho+T)\big) =$$

$$= div\ \Big(\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}(\rho+T)\nabla(\rho+T) + \frac{1}{\rho_0}(\Pi\cdot\vec{u}) + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{Sc}{Pr}\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}T\nabla T\Big) - \Psi. \tag{2.1}$$

Здесь

$$\Psi = \frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\big(\nabla(\rho+T)\big)^2 + \frac{(\Pi:\Pi)}{2\rho_0\eta_0} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{Sc}{Pr}\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\big(\nabla T\big)^2 \tag{2.2}$$

– *неотрицательный диссипативный функционал,* $(\Pi:\Pi) = \sum\limits_{i,j=1}^{3}(\Pi_{ij})^2$ – *двойное скалярное произведение одинаковых тензоров.*

Доказательство. Умножим последовательно уравнения (1.10), (1.11) и (1.12) на $(p_0/\rho_0)\ \rho$, $\vec{u}$ и $(p_0/\rho_0)\ T$ соответственно. Будем иметь

$$\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\rho^2}{2}\Big) + \frac{p_0}{\rho_0}\ \rho\ \mathrm{div}\ \vec{u} =$$

$$= \frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\ \mathrm{div}\ \big(\rho\nabla(\rho+T)\big) - \frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\nabla(\rho+T)\cdot\nabla\rho, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \frac{p_0}{\rho_0}\ (\vec{u}\cdot\nabla)(\rho+T) = \frac{1}{\rho_0}\mathrm{div}\ \big(\Pi\cdot\vec{u}\big) - \frac{(\Pi:\Pi)}{2\rho_0\eta_0}, \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{T^2}{2}\Big) + \frac{p_0}{\rho_0}\ T\ \mathrm{div}\ \vec{u} =$$

$$= \frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\ \mathrm{div}\ \big(T\nabla(\rho+T)\big) - \frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\nabla(\rho+T)\cdot\nabla T +$$

$$+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{Sc}{Pr}\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\ \mathrm{div}\ (T\cdot\nabla T) - \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{Sc}{Pr}\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\big(\nabla T\big)^2. \tag{2.5}$$

При выводе соотношений (2.3) – (2.5) были учтены формулы (1.8) и (1.9). Сложив (2.3), (2.4) и (2.5), преобразуем результат к виду (2.1). □

Теорема 2. *Классическое решение поставленной начально-краевой задачи является единственным.*

Доказательство. Для всех $t \in [0,\ T_f]$ определим функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\frac{p_0}{\rho_0}\rho^2 + \vec{u}^2 + \frac{p_0}{\rho_0(\gamma-1)}T^2\Big)\,dV. \tag{2.6}$$

Проинтегрируем (2.1) по множеству V. Затем воспользуемся (см., например, [5]) правилом Лейбница и формулой Гаусса–Остроградского. Принимая во внимание краевые условия (1.14), будем иметь

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\int\limits_V \Psi\,dV. \tag{2.7}$$

Здесь неотрицательная величина Ψ определена формулой (2.2). Функция $\varphi(t)$, определяемая формулой (2.6), принадлежит классу $C^1([0,\ T_f])$. Из (2.7) вытекает, что она является убывающей. Следовательно,

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0), \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{2.8}$$

Для нулевых начальных условий

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = 0, \quad \rho\Big|_{t=0} = 0, \quad T\Big|_{t=0} = 0, \quad \vec{x} \in \overline{V},$$

неравенство (2.8) принимает вид

$$\varphi(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{2.9}$$

Интегрируя (2.9) по промежутку $[0,\ T_f]$ и принимая во внимание определение (2.6), получим

$$\int\limits_Q \Big(\frac{p_0}{\rho_0}\rho^2 + \vec{u}^2 + \frac{p_0}{\rho_0(\gamma-1)}T^2\Big)\,dV dt \leqslant 0.$$

Если учесть непрерывность и неотрицательность подынтегрального выражения в $\overline{Q}$, то приходим к заключению о том, что

$$\rho(\vec{x},t) = 0, \quad \vec{u}(\vec{x},t) = 0, \quad T(\vec{x},t) = 0$$

для всех $(\vec{x},t) \in \overline{Q}$. В силу линейности задачи это означает, что она имеет единственное решение. $\square$

3. Обобщенное неравенство Корна. Неравенства Фридрихса и Пуанкаре

Для дальнейшего исследования свойств решений поставленной начально-краевой задачи потребуются следующие результаты.

Теорема 3 (обобщенное неравенство Корна)**.** *Для любой вектор-функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ *класса* $\boldsymbol{C}^2(V) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{V})$*, обращающейся в нуль на* ∂V*, выполняется оценка*

$$\eta_0 \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\,dV \leqslant \frac{1}{2\eta_0}\int\limits_V (\Pi : \Pi)\,dV. \tag{3.1}$$

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\frac{1}{2\eta_0}\int\limits_V (\Pi:\Pi)\,dV = \frac{\eta_0}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big)^2\,dV =$$

$$= \frac{\eta_0}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big)\,dV =$$

$$= \frac{\eta_0}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\,dV =$$

$$= \frac{\eta_0}{2}\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2\,dV - \frac{2}{3}\eta_0\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\,dV =$$

$$= \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\,dV + \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dV - \frac{2}{3}\eta_0\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\,dV =$$

$$= \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\,dV + \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\,dV -$$

$$-\eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\partial x_j}\,dV - \frac{2}{3}\eta_0\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\,dV =$$

$$= \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\,dV + \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\,dV -$$

$$-\eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_i}\,dV - \frac{2}{3}\eta_0\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\,dV =$$

$$= \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\,dV + \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\,dV -$$

$$-\eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)\,dV + \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,dV -$$

$$-\frac{2}{3}\eta_0\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\,dV = \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\,dV + \frac{\eta_0}{3}\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\,dV +$$

$$+\eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big)\,dV = \eta_0\int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)^2\,dV +$$

$$+\frac{\eta_0}{3}\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\ dV + \eta_0 \int\limits_{\partial V} \sum_{i,j=1}^{3} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\ n_i\ dS. \tag{3.2}$$

Поверхностный интеграл в (3.2) равен нулю в силу свойств гладкости векторного поля $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ и его обращения в нуль на ∂V. Приходим к соотношению

$$\frac{1}{2\eta_0}\int\limits_V (\Pi : \Pi)\ dV = \eta_0 \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\ dV + \frac{\eta_0}{3}\int\limits_V (\mathrm{div}\ \vec{u})^2\ dV. \tag{3.3}$$

Следствием (3.3) является неравенство (3.1). □

Проведенные рассуждения аналогичны тем, которые использовались В.А. Кондратьевым и О.А. Олейник [6] при получении простого доказательства неравенства Корна.

Теорема 4 (неравенство Фридрихса)**.** *Для любой вектор-функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ класса $\boldsymbol{C}^1(\overline{V})$, обращающейся в нуль на ∂V, выполняется оценка*

$$\int\limits_V \vec{u}^2\ dV \leqslant c_F \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\ dV, \tag{3.4}$$

где c_F – положительная постоянная, зависящая только от геометрических характеристик V.

Теорема 5 (неравенство Пуанкаре)**.** *Для любой функции $p = p(\vec{x})$ класса $C^1(\overline{V})$, удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_V p\ dV = 0,$$

выполняется оценка

$$\int\limits_V p^2\ dV \leqslant c_P \int\limits_V (\nabla p)^2\ dV, \tag{3.5}$$

где c_P – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик V.

Доказательства неравенств Фридрихса и Пуанкаре можно найти в [7].

4. Асимптотическая устойчивость равновесного решения

Покажем, что равновесное решение

$$\rho = 0, \quad \vec{u} = 0, \quad T = 0$$

системы (1.10) – (1.12) является асимптотически устойчивым.

Теорема 6. *Существует положительная константа α, не зависящая от выбора T_f, такая, что для всех $t \in [0, T_f]$ выполняется неравенство*

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0)e^{-\alpha t}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Перепишем (2.7) в эквивалентной форме

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt} = \int\limits_V \Big(\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\big(\nabla(\rho+T)\big)^2 + \frac{(\Pi:\Pi)}{2\rho_0\eta_0} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{Sc}{Pr}\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\big(\nabla T\big)^2\Big)\, dV. \tag{4.2}$$

Проинтегрируем (1.10) и (1.12) по множеству V. Используя формулу Гаусса–Остроградского и краевые условия (1.14), преобразуем полученные равенства к виду

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV = 0, \quad \frac{d}{dt}\int\limits_V T\, dV = 0. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что

$$\int\limits_V \rho\, dV = \int\limits_V \rho_*\, dV, \quad \int\limits_V T\, dV = \int\limits_V T_*\, dV, \quad t\in[0,T_f]. \tag{4.4}$$

Комбинация (1.15) и (4.4) дает

$$\int\limits_V \rho\, dV = 0, \quad \int\limits_V T\, dV = 0, \quad t\in[0,T_f]. \tag{4.5}$$

Оценим снизу правую часть (4.2) с помощью обобщенного неравенства Корна (3.1), неравенств Фридрихса (3.4) и Пуанкаре (3.5). Примем во внимание (4.5). Будем иметь

$$\begin{gathered}
-\frac{d\varphi(t)}{dt} = \int\limits_V \Big(\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\big(\nabla(\rho+T)\big)^2 + \frac{(\Pi:\Pi)}{2\rho_0\eta_0} + \\
+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{Sc}{Pr}\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2}\big(\nabla T\big)^2\Big)\, dV \geqslant \frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2 c_P}\int\limits_V(\rho+T)^2\, dV + \\
+\frac{\eta_0}{\rho_0 c_F}\int\limits_V \vec{u}^2\, dV + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{Sc}{Pr}\frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2 c_P}\int\limits_V T^2\, dV = \\
= \frac{\eta_0}{\rho_0 c_F}\int\limits_V \vec{u}^2\, dV + \frac{p_0^2\tau_0}{\rho_0^2 c_P}\int\limits_V\Big(\rho^2 + 2\rho T + \Big(1+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{Sc}{Pr}\Big)T^2\Big)\, dV.
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь $c_F = c_F(V)$ и $c_P = c_P(V)$ – положительные константы Фридрихса и Пуанкаре соответственно, зависящие только от геометрических характеристик V. По критерию Сильвестра квадратичная форма

$$F(\rho,T) = \rho^2 + 2\rho T + \Big(1+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{Sc}{Pr}\Big)T^2$$

положительно определена. В силу известной теоремы математического анализа (см. [8] , с. 602) существует положительная постоянная

$$\beta = \min_{\rho^2+T^2=1} F(\rho,T),$$

такая, что при произвольных ρ и T выполняется оценка

$$F(\rho,T)=\rho^2+2\rho T+\Big(1+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{Sc}{Pr}\Big)T^2\geqslant\beta\big(\rho^2+T^2\big). \tag{4.7}$$

Подстановка (4.7) в (4.6) дает

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt}\geqslant\frac{\eta_0}{\rho_0 c_F}\int\limits_V \vec{u}^2\,dV+\frac{\beta p_0^2\tau_0}{\rho_0^2 c_P}\int\limits_V\left(\rho^2+T^2\right)dV. \tag{4.8}$$

Запишем (4.8) в равносильной форме

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt}\geqslant\frac{2\beta p_0\tau_0}{\rho_0 c_P}\,\frac{p_0}{\rho_0}\int\limits_V\frac{\rho^2}{2}\,dV+\frac{2p_0\tau_0\,Sc}{\rho_0 c_F}\int\limits_V\frac{\vec{u}^2}{2}\,dV+$$

$$+\frac{2(\gamma-1)\beta p_0\tau_0}{\rho_0 c_P}\,\frac{p_0}{\rho_0(\gamma-1)}\int\limits_V\frac{T^2}{2}\,dV. \tag{4.9}$$

Определим положительную постоянную α по формуле

$$\alpha=\min\Big\{\frac{2\beta p_0\tau_0}{\rho_0 c_P},\frac{2p_0\tau_0\,Sc}{\rho_0 c_F},\frac{2(\gamma-1)\beta p_0\tau_0}{\rho_0 c_P}\Big\}.$$

Принимая во внимание (2.6), приходим к неравенству

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt}\geqslant\alpha\varphi(t),$$

которое можно представить в эквивалентном виде

$$e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}\Big(e^{\alpha t}\varphi(t)\Big)\leqslant 0,\quad t\in[0,T_f].$$

Экспонента $e^{-\alpha t}$ принимает только положительные значения. Поэтому функция $\psi(t)=e^{\alpha t}\varphi(t)$ является убывающей на $[0,T_f]$. В частности,

$$\psi(t)\leqslant\psi(0) \tag{4.10}$$

при всех $t\in[0,T_f]$. Неравенство (4.10) эквивалентно (4.1). □

Следствие 1. *Если $T_f=+\infty$, то $\varphi(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.*

Факт асимптотической устойчивости равновесного решения установлен.

Заключение

Для линеаризованной КГД системы в приближении слабосжимаемой вязкой жидкости теоремы о единственности классического решения и асимптотической устойчивости равновесного решения доказаны в [9]. Единственность решения основной начально-краевой задачи в нелинейном случае установлена в [10]. Открытым остается вопрос о единственности классического решения полной квазигидродинамической системы (1.1) – (1.3). Для соответствующей системы Навье–Стокса эта проблема была решена Дж. Серриным [11].

Список литературы

[1] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1997. С. 127–155.

[2] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[3] Шеретов Ю.В. Анализ задачи о распространении звука для линеаризованных КГД–систем // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2001. С. 178–191.

[4] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Математические заметки, 2008. Т. 83, № 5. С. 667–682.

[5] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях уравнений Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 17. С. 41–58.

[6] Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи математических наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.

[7] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

[8] Тер–Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988. 816 с.

[9] Шеретов Ю.В. Методы построения точных решений квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 21. С. 5–26.

[10] Шеретов Ю.В. Единственность классического решения основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 20. С. 7–20.

[11] Serrin J. On the uniqueness of compressible fluid motions // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1959. Vol. 3, № 1. Pp. 271–288.

Библиографическая ссылка

Шеретов Ю.В. О единственности классического решения линеаризованных квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 33–45.

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
профессор кафедры математического анализа Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Yurii.Sheretov@tversu.ru.

ON THE UNIQUENESS OF CLASSICAL SOLUTION FOR LINEARIZED QUASI–HYDRODYNAMIC EQUATIONS

Sheretov Yuriy Vladimirovich
Professor of Mathematical Analysis chair
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: Yurii.Sheretov@tversu.ru.

Received 20.04.2014, revised 10.05.2014.

For linearized quasi–hydrodynamic equations the theorem on the uniqueness of classical solution of posed initial boundary value problem is proved. Asymptotic stability of equilibrium solution is established.

Keywords: linearized quasi–hydrodynamic equations, uniqueness of classical solution, asymptotic stability of equilibrium solution.

Bibliographic citation

Sheretov Yu.V. On the uniqueness of classical solution for linearized quasi–hydrodynamic equations. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 2, pp. 33–45. (in Russian)